III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
megyei szakasz, 2020. január 18.

IX. osztály

1. feladat. Adott egy négyzet, amely egységnyi négyzetekre van felosztva. A bal felső sarkából kiindulva az első sor és az első oszlop mindegyik négyzetébe írjuk az 1 számot, majd a második sor és második oszlop mindegyik négyzetébe a 2 számot, felülírva az eredetileg már létező számokat. Az eljárást folytatjuk, amíg minden sor és minden oszlop négyzetei kitöltődnek valamelyik számmal. Hány egység a négyzet oldala, ha a benne levő számok összege 372?

2. feladat.
a) Igazold, hogy $(x+2)(x^2-6x+16) \geq 32$, bármely $x \in [0,\infty)$ esetén.
b) Ha $x, y, z \in [0,\infty)$ és $x+y+z=6$, bizonyítsd be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{x^2-6x+16}+\frac{1}{y^2-6y+16}+\frac{1}{z^2-6z+16} \leq \frac{3}{8}.$$

3. feladat. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:
a) $x+([x]-2020)^{2020}=[x]$;
b) $x^2-6[x]\{x\}+3\{x\}^2=9$.

4. feladat. Az O középpontú, R sugarú körbe írt $M_1M_2M_3M_4$ négyszög esetén teljesül az

$$\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}+\overrightarrow{OM_4}=\overrightarrow{0}$$

feltétel.
a) Milyen négyszög az $M_1M_2M_3M_4$?
b) Tudva, hogy $M_1M_2M_3M_4$ téglalap, igazold, hogy

$$|\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}|^2+|\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_3}|^2+|\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_4}|^2+|\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_3}|^2+$$
$$+|\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_4}|^2+|\overrightarrow{OM_3}-\overrightarrow{OM_4}|^2=16R^2.$$

Megjegyzés: Minden feladat kötelező, munkaidő: 3 óra.